

PROBLEMAS QUE PLANTEA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS*

ANDRE REVUZ**

La causa principal de las transformaciones que sufre actualmente la enseñanza de las matemáticas en todos los países del mundo, se debe, sin duda, al desarrollo intrínseco de las ciencias matemáticas durante el transcurso del último siglo; crecimiento que puede calificarse de explosión o mutación, y cuyo resultado es aquello que designamos con un término poco feliz, pero que ha sido bien recibido por el público general: las matemáticas modernas. A este respecto, es indispensable ponerse en guardia contra un cierto número de ideas falsas y extraordinariamente difundidas, la primera de las cuales consiste en oponer unas matemáticas llamadas clásicas a otras llamadas modernas, y a presentarlas como dos maneras irreductibles, pero igualmente válidas, de concebir la ciencia matemática, y entre las cuales, además, la elección no sería más que un asunto de gusto personal o de encaprichamiento colectivo. Las matemáticas modernas son la hija legítima de las matemáticas clásicas, de quienes no reniegan, y cuya herencia han acrecentado realizando un buen número de sus esperanzas, sacándolas del estancamiento en el que se encontraban y aclarando muchos puntos antes oscuros. Así como un ser viviente se vuelve distinto al transformarse y sin embargo permanece esencialmente el mismo, las matemáticas contemporáneas son una extensión de las anteriores, sólo que ahora cuentan con una experiencia más sólida, más rica y más profunda, y con frecuencia pueden hacer fácilmente lo que antes hubiera parecido difícil o imposible.

Este primer error coexiste a menudo con otro que lo contradice formalmente y que debería excluirlo, pero paradójicamente se encuentra asociado junto con los pobres razonamientos que uno se da para eximirse del esfuerzo de aprender lo que se ignora, y que es darse cuenta de que las matemáticas no son invariables. Si bien es cierto que cada teorema demostrado queda como tal para la eternidad, asimismo el lugar de un teorema dentro de una teoría, o el lugar de cada teoría dentro del organismo viviente total que constituye, en todo momento, la ciencia matemática, puede también variar considerablemente. Juzgar a esta disciplina como una colección de resultados o de métodos dados de una vez para siempre es ciertamente una visión superficial y por ende totalmente inexacta. Su progreso consiste menos en la acumulación de resultados (aunque éstos constituyen una señal visible), que en su aptitud para atacar problemas nuevos. El verdadero progreso profundo y esencial de las matemáticas es aquel que permite un uso más fecundo de la inteligencia humana.

Si la repercusión de la evolución de las matemáticas sobre la enseñanza ha sido con frecuencia conflictiva, se debe a que esta última negaba, hasta hace poco, la evolución de sus hábitos más profundos, y a que en la elaboración de sus programas y la elección de sus métodos, caía víctima de un error de perspectiva que la llevaba a introducir las teorías o nociones, según el orden histórico de aparición, haciéndolas funcionar ya dentro del espíritu que reinaba en el momento de esta aparición, ya dentro de una síntesis vieja, meritoria para su época, pero ampliamente superada por los progresos posteriores. Sólo muy raramente un orden histórico de elaboración de nociones resulta un orden perfectamente racional. Si bien es inexacto hablar de unas matemáticas tradicionales, había en cambio una tradición en la enseñanza, una tradición en el sentido estricto del término, que transmitía de generación en generación las mismas teorías con modificaciones de detalle o de apariencia, pero que ignoraba soberbiamente los trabajos de una ciencia en marcha.

Aquellas cosas que, dentro del desarrollo histórico de la ciencia, habían sido perfeccionamientos sucesivos que hacían obsoletos los procedimientos más viejos, dieron lugar, dentro de la enseñanza, en el mejor de los casos, a exposiciones sucesivas donde las torpezas más viejas eran presentadas en primera instancia a la totalidad de los alumnos principiantes, y posteriormente las ideas más fecundas y los métodos más cómodos, solamente a una parte de los más avanzados.

*Este artículo se publicó originalmente en la Revue de l'Enseignement Supérieur, editada por L'Association d'Etude pour l'Expansion de l'Enseignement Supérieur, París, números 46-47. Traducción de Francisco González Ortiz.

**Profesor de la Facultad de Ciencias de París y director del Instituto de Investigación sobre la enseñanza de las Matemáticas de París.

La extraordinaria aceleración del desarrollo matemático en el transcurso del último siglo, y el hecho de que al término de esta evolución las matemáticas se hubieran dotado de una nueva estructura y hubieran visto consagrados sus esfuerzos en lo relativo al esclarecimiento de sus nociones básicas, antes tan a menudo dejadas en una peligrosa imprecisión, hacían inaceptable que la enseñanza perseverara en su rutina. Debido a ello, se generó en Francia, entre 1950 y 1955, un movimiento de reforma que inicialmente afectaría sólo a la enseñanza superior, pero al que después se unirían la enseñanza media y posteriormente la enseñanza elemental y preescolar, ya de manera “oficial”. Los primeros esfuerzos intentaban en esencia transformar el contenido matemático de la enseñanza, pero el problema se extendió rápidamente bajo la influencia convergente de diversos factores:

1. La transformación interna de las ciencias matemáticas se dio acompañada también de una extensión en sus dominios de aplicación. Las ciencias físicas ya no son las únicas consumidoras de las matemáticas, también las ciencias biológicas, económicas y humanas hacen un uso cada vez mayor de ellas. Además, la mayoría de los campos de aplicación más recientes pueden recurrir también a los instrumentos de conocimiento y de implementación más avanzados.

La enseñanza de las matemáticas ha de ser concebida, por tanto, como una disciplina que debe colaborar con todas las otras, y que debe hacer aptos a los estudiantes para que puedan determinar cuándo un problema amerita ser tratado matemáticamente. Con este propósito se habla ahora de matematización de situaciones concretas y se considera que no debemos contentarnos con enseñar las matemáticas por sí mismas, sino que es preciso enseñar a matematizar, y por otra parte, resaltar los rasgos que le dan a esta ciencia su solidez, su belleza y su fecundidad.

Es necesario precisar el error de perspectiva que conlleva la expresión “matemáticas aplicadas” y que deja entender que uno desarrolla la ciencia matemática por sí misma, para luego aplicarla inmediatamente. El origen de toda matemática se da dentro de una actividad real donde se requiere eficacia. Las matemáticas llamadas “puras”, nacen de una reflexión de segundo grado sobre los instrumentos elaborados en un primer momento. Así, dejando de lado todo lo contingente y conservando sólo aquello que es esencial, aumentan su eficacia y amplían el dominio de su aplicación.

El proceso de la intervención de las matemáticas en las actividades humanas puede ser sumariamente esquematizado como sigue:

- a) Determinación de una situación; es decir, delimitación relativamente precisa de un campo de actividad en el interior de un campo más vasto, y fijación de los objetivos que uno se propone alcanzar.
- b) Fabricación de modelos matemáticos que traduzcan junto con las simplificaciones o distorsiones (en general inevitables, pero cuya importancia es imprescindible que se discuta y aprecie), los rasgos específicos de la situación.

Es posible hacer que para cada situación correspondan varios modelos diferentes susceptibles de funcionar, y naturalmente cada uno de ellos tendrá sus ventajas y sus inconvenientes. Inversamente, un mismo modelo matemático puede ser empleado para estudiar situaciones de apariencia concreta muy diferente (las medidas de longitud, de área, de masa, y la teoría de probabilidades, por ejemplo, emplean los mismos modelos).

El estudio intrínseco de un modelo manifiesta de modo natural a las matemáticas. Las propiedades de una situación concreta, que se retienen en el modelo, son los puntos de partida (los axiomas) de la deducción que se operará con este propósito y al curso de la cual uno deberá elegir entre emplear los instrumentos matemáticos ya existentes, o crear otros nuevos. El reajuste del modelo a la situación, y en consecuencia la selección de axiomas, es resultado de una acción humana y como tal imperfecta, por tanto revocable. Sin embargo, una vez que han sido escogidos los axiomas, el modelo ha sido fijado y la teoría se desarrolla inexorablemente. Los resultados del estudio serán confrontados con la experiencia, y en caso de desacuerdo será necesario buscar otro modelo (y siempre que uno sea capaz de construirlo, no olvidar las fallas del precedente).

- c) Edificación de teorías generales. Así como un mismo modelo puede funcionar en situaciones diferentes, es frecuente que modelos diferentes tengan la misma “estructura”. El estudio de estas estructuras es el objeto de las teorías matemáticas. Además del placer estético que encuentra el matemático en su elaboración, estas teorías tienen la ventaja práctica de realizar una considerable economía de pensamiento, pues al no guardar de cada modelo sino los rasgos constitutivos fundamentales que determinan su funcionamiento, permiten una clasificación que, ante una situación concreta, ayuda mucho para orientar la elección hacia los modelos más adecuados.

Estas tres fases, “situación-modelo-teoría”, dan cuenta de la génesis, el desarrollo y la eficacia de las teorías matemáticas. Una enseñanza que descuide uno de estos términos, mutila aquello que pretende enseñar, lo hace más difícilmente asimilable y menos enriquecedor para el desarrollo de las aptitudes intelectuales de los alumnos.

2. Es necesario enfatizar que la extensión del dominio de utilización de las matemáticas no debe tomar la forma de un imperialismo matemático. Si bien es cada vez más cierto que toda actividad humana tiene un componente matemático implícito, es todavía más verdadero que las matemáticas, por sí mismas, no pueden resolver nada de lo que está fuera de su terreno específico, pues aunque ayudan a estudiar profundamente estos modelos, el problema clave de la adecuación del modelo a la realidad no es de su incumbencia.

Esta extensión de las matemáticas le plantea a la enseñanza un problema esencial: es indispensable superar la actual situación que, por una parte, forma una ínfima minoría de personas que comprenden las matemáticas (y que además con frecuencia están poco inclinadas a interesarse en aplicarlas prácticamente) y que, por otra, deja de lado a una aplastante mayoría que es incapaz de emplear la más mínima cosa que se relacione con las matemáticas. Es preciso, al contrario, que todos los alumnos estén lo bastante familiarizados con el espíritu de las matemáticas como para estar en posición de hacerlas intervenir en el momento oportuno dentro de sus actividades. La enseñanza no debe utilizar a las matemáticas como un cómodo medio de selección de alumnos, sino lograr que el mayor número posible de personas sea capaz de servirse inteligentemente de ellas, lo cual excluye las soluciones de aparente facilidad tan frecuentemente recomendadas y que reducen la enseñanza a la comunicación de recetas, lo cual, a su vez, plantea un problema de didáctica y pedagogía que se ha comenzado a enfrentar y que sería necesario resolver sin tardanza.

3. La enseñanza de las matemáticas se enfrenta con una dificultad esencial percibida desde hace mucho y que, independientemente de la evolución científica, ha sido el objeto de las preocupaciones de muchos profesores; a saber, la dualidad entre la “ciencia hecha” y la “ciencia por hacerse”. La ciencia hecha es el cuerpo de doctrina relativamente acabado y elaborado esmeradamente, que constituye el estado de la ciencia en un momento dado y que se encuentra materialmente “registrado” en los libros y encarnado en el “saber hacer” de los especialistas. Se sabe objetivamente lo que esta ciencia es; y además, es un hecho social coercitivo. La ciencia por hacerse está en busca de verdades todavía desconocidas. Social y profesionalmente es objeto del trabajo de los “investigadores”, pero psicológicamente hablando, toda verdad desconocida se presenta al individuo bajo el aspecto de la ciencia por hacerse, ya sea, o no, conocida por una fracción de la humanidad.

Ahora bien, el problema didáctico más importante nace de la misión que la sociedad le asigna al profesor: que enseñe la ciencia hecha. Mientras que para el alumno o el estudiante la situación psicológica-existencial, dirían algunos, corresponde a la elaboración de la ciencia por hacerse. Si el maestro, a quien la presión social (programa, exámenes) empuja fuertemente en este sentido, pone demasiado énfasis sobre el aspecto “ciencia hecha”, el diálogo con su alumno está viciado desde la base: el profesor someterá y obligará, y el espíritu del alumno, en lugar de desarrollarse libremente y de lograr una progresión cada vez más vigorosa, será aplastado por la masa inerte de adquisiciones de la ciencia hecha.

Ya se ha dicho que la misión del profesor es sobre todo la de “enseñar a aprender”, y la fórmula es buena si no se la obliga a significar que uno puede enseñar a aprender sin enseñar un contenido preciso,

y si uno no olvida que todos los contenidos están lejos de ser igualmente favorables a la formación del espíritu.

Los promotores de lo que actualmente llamamos métodos de redescubrimiento, métodos activos y de reconstrucción personal de las matemáticas, se han dado cuenta de esta dificultad y están tratando de detenerla, pero sus esfuerzos han sido hasta ahora demasiado tímidos o demasiado limitados. La enseñanza de las matemáticas no tendrá un rendimiento satisfactorio y no aportará verdaderamente una cultura enriquecedora y utilizable a sus alumnos, hasta que no esté animada, en todos sus aspectos, por un espíritu de investigación. Esta enseñanza haría bien en tomar en cuenta el desarrollo matemático de todos los siglos anteriores (¡incluido el último!), para hacer comprensible aquello que tienen de viviente y de más rico en promesas de desarrollo, y para hacer a los alumnos capaces de informarse ellos mismos en la literatura especializada, lo cual sólo es el caso para una pequeña minoría de los estudiantes que actualmente salen de las universidades. Debe también velar por una fortificación de la libertad del espíritu, y ser capaz de excitar la imaginación de manera que el célebre rigor matemático no haga el papel de rígido censor, sino de guía y estímulo.

Ahora bien, la oportunidad que actualmente tiene la enseñanza es la posibilidad de poder satisfacer, con mucha mayor facilidad de la que jamás se haya tenido, las exigencias de naturalezas variadas, lo cual puede lograr si se basa sobre la organización flexible y las ideas simples dinámicas y de largo alcance de las matemáticas contemporáneas que se prestan particularmente bien a una enseñanza activa y a la aplicación de las tres fases “situación-modelo-teoría”.

Ciertamente es muy posible enseñar las matemáticas contemporáneas de una manera dogmática, pero sería mucho más fácil hacerlo suscitando la actividad de los alumnos. Algunos profesores se han sentido grandemente estimulados una vez que han sido impregnados por el nuevo espíritu de esta disciplina. La mutación que ha dado lugar a las matemáticas actuales, ha venido, en efecto, acompañada de una liberación espiritual fundada sobre una toma de conciencia más pura de la naturaleza particular de esta disciplina. Es difícil, sin duda, decir de una manera definitiva y absoluta lo que son las matemáticas, porque son una creación, y una creación continua; sin embargo, es claro que no se trata de un conocimiento de la realidad fenomenal y que su dominio es el del pensamiento y la acción intelectual. Las matemáticas no tienen, en realidad, un objeto privilegiado de estudio, pero es justamente esta neutralidad, con respecto a toda verdad de facto, lo que las hace idóneas para intervenir en las situaciones más variadas. Es por eso que el dinamismo propio de esta ciencia debe ser la base del dinamismo de su enseñanza.

No es descabellado pensar que asistimos al comienzo de una revolución de la enseñanza de las matemáticas, que sobrepasará, con mucho, los escasos cambios de contenido que se han operado, y que terminará con las divisiones intelectuales que separan los diversos órdenes de enseñanza y las diversas disciplinas, así como con la oposición artificial entre las matemáticas llamadas puras y las llamadas aplicadas, todo lo cual acrecentará considerablemente el rendimiento de la enseñanza. Este movimiento le interesa al mundo entero, como puede atestiguarlo, en particular, el Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas llevado a cabo en Lyon por la Comisión sobre la enseñanza de la Unión Internacional de Matemáticas. en agosto de 1969, y en el cual participaron más de setecientos profesores provenientes de 37 naciones de todo el mundo.

La transformación de la enseñanza tiene que ser paulatina y a largo plazo, y no habrá ningún milagro que resuelva todo de una sola vez. El problema debe ser atacado en su totalidad. Las soluciones que empiezan diciendo: “lo único que tenemos que hacer es...” no demuestran, en realidad, más que la incapacidad de quien así se expresa, para afrontar una tarea completa y, la verdad sea dicha, ingrata. La comisión ministerial, presidida por el doctor A. Lichnérowicz, ha comprendido muy bien, desde el principio, la complejidad y dificultad de la tarea que nos espera. Por esta razón la comisión ha previsto planes cuatrienales sucesivos y considera que los diversos aspectos de la transformación: programas, métodos de enseñanza, formación inicial y formación continua de profesores, difusión de la información relativa a las matemáticas y a su enseñanza, son indisolubles y deben ser tratados simultáneamente. Toda deficiencia sobre cualquiera de ellas disminuirá considerablemente la eficacia del trabajo efectuado

sobre las otras. Lo mismo sucede con la investigación relacionada directamente con la enseñanza: es indispensable no separar los contenidos de los métodos de enseñanza. No hay ningún “saber hacer” pedagógico que pueda suplir la falta de información científica: así como la información científica de un individuo no garantiza, de ninguna manera, que la sabrá comunicar bien. Por tanto, será necesario proceder al estudio simultáneo de:

- Una investigación detallada de las nociones y de los instrumentos matemáticos que esté dirigida hacia una buena concepción del origen, el alcance y las relaciones con las otras nociones. Este estudio es la base indispensable de todo progreso didáctico.
- Una indagación de las situaciones adecuadas que demuestren la intervención de las matemáticas en el estudio de la realidad. Para esto es necesario que se trate de situaciones auténticas, y sin embargo, en particular para los principiantes, lo bastante simples como para que puedan ser enfrentadas exitosamente. En este sentido existe un campo de estudio, extremadamente importante e insuficientemente explorado hasta el presente.
- Un estudio de los procesos de comprensión y descubrimiento de las matemáticas. sobre los cuales sólo tenemos visiones parciales, frecuentemente demasiado parciales.

El desarrollo de este trabajo debe ser la tarea principal de los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, cuya creación fue recomendada por la comisión Lichnerówicz, y cuyo funcionamiento para tres de ellos fue decidido por el Ministro de Educación Nacional en septiembre de 1968 y continuado por la creación de cuatro nuevos en octubre de 1969.

Es necesario no disimular la amplitud ni las dificultades de la tarea; sin embargo, lo que está en juego es poner a disposición de todos los hombres de mañana las mejores herramientas forjadas por aquellos que les precedieron, y permitirles un dominio pleno de ellas, lo cual ejercerá una influencia lo bastante decisiva sobre la salud de la sociedad moderna como para que se consagre, a todos los niveles, un gran esfuerzo de reflexión, de información y de investigación. Sería muy deseable que a las dificultades intrínsecas de la tarea, no se sobrepusieran dificultades extrañas de naturaleza financiera o administrativa que amenazaran con absorber sin beneficio la energía de sus promotores más esforzados.